Системы счисления

Первоначально понятие отвлеченного числа отсутствовало, число было "привязано" к тем предметам, которые пересчитывали. Отвлеченные понятие натурального числа появляется вместе с развитием письменности. Так как древние народы не общались друг с другом, то у разных народов возникли разные системы счисления и представления чисел и цифр.

Система счисления – совокупность приемов и правил для записи чисел цифровыми знаками.

В зависимости от способов изображения чисел цифрами, системы счисления делятся на *непозиционные* и *позиционные*. **Непозиционной** системой называется такая, в которой количественное значение каждой цифры не зависит от занимаемой ей позиции в изображении числа (римская система счисления). **Позиционной** системой счисления называется такая, в которой количественное значение каждой цифры зависит от её позиции в числе (арабская система счисления).

Количество знаков или символов, используемых для изображения числа, называется **основанием системы счисления**.

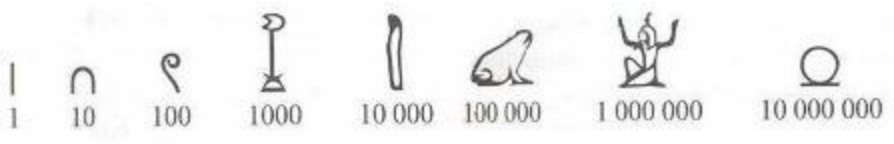
Непозиционные системы счисления

Унарная система счисления

У первобытных людей не было даже чисел, они количество предметов отображали равным количеством каких-либо значков. Такими значками могли быть зарубки, чёрточки, точки, узелки на веревках. Количество предметов, например, мешков, изображалось нанесением чёрточек или засечек на какой-либо твёрдой поверхности: камне, глине, дереве. Каждому мешку в такой записи соответствовала одна чёрточка. Учёные назвали этот способ записи чисел единичной (унарной или палочной) системой счисления. Неудобства такой системы записи чисел и ограниченность ее применения очевидны: чем больше число надо записывать, тем длиннее строка из палочек; при записи числа легко ошибиться – нанести лишнее количество палочек или, наоборот, не дописать палочек.

Древнеегипетская система счисления

В древнеегипетской системе счисления, которая возникла во второй половине третьего тысячелетия до н.э., использовались специальные знаки (цифры) для обозначения чисел 1, 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6, 10^7. Числа в египетской системе счисления записывались как комбинации этих «цифр», в которых каждая «цифра» повторялась не более девяти раз.



В основном как палочной, так и древнеегипетской систем счисления лежал простой принцип сложения, согласно которому значение числа равно сумме значений цифр, участвующих в его написании. Учёные относят древнеегипетскую систему счисления к десятичной непозиционной.

Пример. Число 345 древние египтяне записывали так:

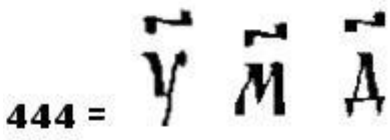
Славянская система счисления

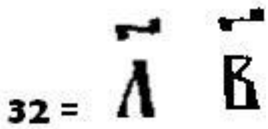
Более современными непозиционными системами счисления были алфавитные системы. К числу таких систем счисления относились славянская, ионийская (греческая), финикийская и другие. В них числа от 1 до 9, целые количества десятков (от 10 до 90) и целые количества сотен (от 100 до 900) обозначались буквами алфавита. Алфавитная система была принята в древней Руси. Числа от 1 до 10 записывались так:

Над буквами, обозначавшими числа, ставился специальный знак – титло. Это делалось для того, чтобы отличить числа от обычных слов:

Интересно, что числа от 11 (один – на десять) до 19 (девять – на десять) записывали так же, как говорили, то есть «цифру» единиц ставили до «цифры» десятков.

Пример: Запишем в славянской записи числа 444 и 32:





Мы видим, что запись получилась не длиннее нашей десятичной. Это объясняется тем, что в алфавитных системах использовались, по крайней мере, 27 «цифр». Но эти системы были удобны только для записи чисел до 1000.

Правда, славяне, как греки, умели записывать числа и больше 1000. Для этого к алфавитной системе добавляли новые обозначения. Так, например, числа 1000, 2000… записывали теми же «цифрами», что и 1, 2, 3…, только перед «цифрами» ставили слева снизу специальный знак:

1000 = 

Число 10000 обозначалось той же буквой, что и 1, только без титла, ее обводили кружком: 10000 = 

Называлось это число «тьмой». Отсюда и произошло выражение «тьма народу».

Таким образом, для обозначения «тем» (множественное число от слова тьма) первые 9 «цифр» обводились кружками. 10 тем было единицей высшего разряда. Ее называли «легион». 10 легионов составляли «леодр». Самая большая из величин, имеющих свое обозначение, называлось «колода», она равнялась 10^{50}.

Такой способ записи чисел можно рассматривать как зачатки позиционной системы, так как в нем для обозначения единиц разных разрядов применялись одни и те же символы, к которым лишь добавлялись специальные знаки для определения значения разряда.

Римская система счисления

Знакомая нам римская система принципиально ненамного отличается от египетской. В ней для обозначения чисел 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000 используются заглавные латинские буквы I, V, X, L, C, D, M (соответственно), являющиеся «цифрами» этой системы счисления. Число в римской системе счисления обозначается набором стоящих подряд «цифр». Значение числа равно:

1) Сумме значений идущих подряд нескольких одинаковых «цифр» (назовём их группой первого вида);

2) Разности значений двух «цифр», если слева от большей «цифры» стоит меньшая. В этом случае от значения большой «цифры» отнимается значение меньшей «цифры». Вместе они образуют группу второго вида. Заметим, что левая «цифра» может быть меньше правой максимум на один порядок: так перед L (50) и C (100) из «младших» может стоять только X (10), перед D (500) и M (1000) – только C (100), перед V (5) – только I (1);

3) Сумме значений групп и «цифр», не вошедших в группы первого или второго вида.

<u>Пример.</u> Число 32 в римской системе счисления имеет вид XXXII = (X + X + X) + (I + I) = 30 + 2 (две группы первого виды).

<u>Пример.</u> Число 444, имеющее в десятичной записи 3 одинаковые цифры, в римской системе счисления будет записано в виде CDXLIV = (D - C) + (L - X) + (V - I) = 400 + 40 + 4 (три группы второго вида).

<u>Пример.</u> Число 1974 в римской системе счисления имеет вид MCMLXXIV = M + (M - C) + L + (X + X) + (V - I) = 1000 + 900 + 50 + 20 + 4 (наряду с группами обеих видов в формировании числа участвуют отдельные «цифры»).

Позиционные системы счисления

Десятичная система счисления

Наиболее известна десятичная система счисления, в которой для записи чисел используются цифры 0, 1, …, 9. Способов записи чисел цифровыми знаками существует бесчисленное множество.

Позиционные системы счисления имеют ряд преимуществ перед непозиционными: удобство выполнения арифметических и логических операций, а также представление больших чисел.

Другие позиционные системы счисления

Позиционных систем можно придумать множество, например, троичная система: тогда в её алфавите будут цифры 0, 1, 2. Или, например, девятеричная система счисления, её алфавит будет содержать 9 цифр от 0 до 8.

В информатике принято использовать ***двоичную*** систему счисления. Её алфавит состоит из двух цифр 0 и 1. Дело в том, что современные машины обрабатывают информации только в двоичном (бинарном) коде. Т.е. любая информация в компьютере представлена с помощью нулей и единиц. А это значит, что существуют алгоритмы превращения любой информации (вспомним, что выделяют 4 вида: числовая, текстовая/символьная, графическая и звуковая) в набор 0 и 1.

Так же широко распространено применение ***восьмеричной*** системы (0 – 7) и ***шестнадцатеричной системы*** (0 – 9, A – F).

Большим плюсом позиционных систем счисления является тот факт, что правила образования чисел из цифр, правила арифметики не меняются от системы к системе.

Существуют универсальные математические алгоритмы перевода числа из любой позиционной системы счисления в любую.

Рассмотрим лишь два конкретных случая.

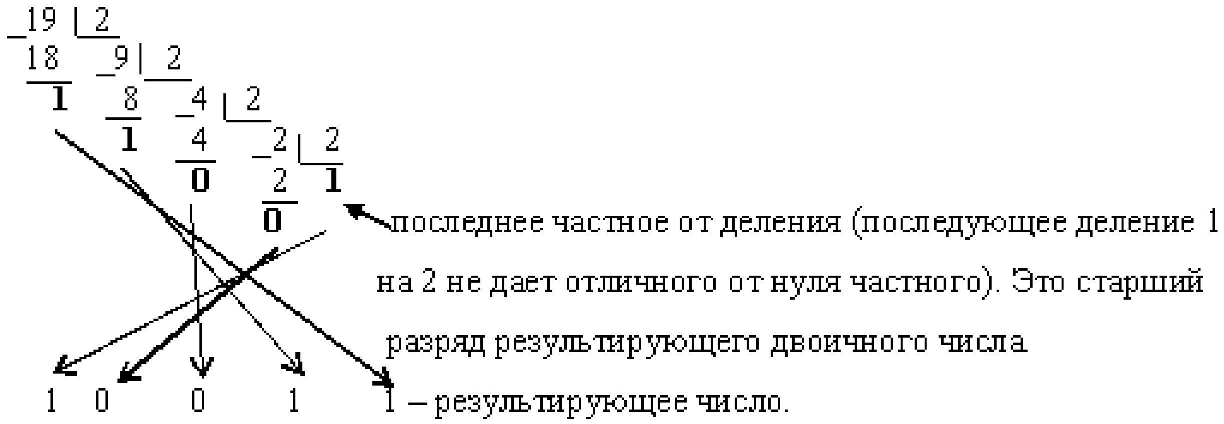
Правила перевода из десятичной системы счисления в двоичную

1. Исходное целое число делится на основание системы счисления, в которую переводится (2).

2. Если полученное частное не делится на основание системы счисления так, чтобы образовалась целая часть, отличная от нуля, (т.е. мы получили 1) процесс деления прекращается, переходят к следующему шагу. Иначе над частным выполняют действия, описанные в предыдущем шаге.

3. Формируется результирующее число: его старший разряд – полученное последнее частное, каждый последующий младший разряд образуется из полученных остатков от деления, начиная с последнего и кончая первым. Таким образом, младший разряд полученного числа – первый остаток от деления, а старший – последнее частное.

Пример. Выполнить перевод числа 19 в двоичную систему счисления:



Таким образом, $19 = 10011_2$.

Из двоичной системы счисления – в десятичную

В математике существует понятие *развернутая запись числа*:

$$3568 = 3000 + 500 + 60 + 8 = 3*1000 + 5*100 + 8*10 + 8*1=$$

$$3*10^3 + 5*10^2 + 8*10^1 + 8*10^0$$

Как говорилось ранее математические правила работают одинаково в любой системе счисления. Это значит, что число в двоичной системе счисления можно записать в развернутом виде с той лишь разницей, что умножать цифру числа нужно не на 10. Т.к. в данном примере 10 – это основание системы счисления. А разлагаемое число в двоичной системе имеет основание 2.

После получения развернутой записи числа необходимо выполнить обычные арифметические действия в десятичной системе счисления. Результатом будет искомое число.

Пример. Выполнить перевод числа 10011_2 в десятичную систему счисления. Имеем:

$$10011_2 = 1*2^4 + 0*2^3 + 0*2^2 + 1*2^1 + 1*2^0 = 16 + 0 + 0 + 2 + 1 = 19_{10}.$$